Lionel BARRE
SURF_1.doc

APPROCHE DE LA NOTION D'AIRE AU CM2

A. QUELQUES POINTS IMPORTANTS

La notion d'aire doit être introduite concrètement par le maître qui aura à l'esprit les points suivants :

1. Avant de parler d'aire, il faut parler de surface. Une surface plane est une partie du plan ; elle peut avoir TOUTES les formes voulues (Formes carrée, rectangulaire, circulaire, …)
2. L'aire d'une surface rend compte de la place occupée par cette surface, sur le plan. C'est une grandeur physique.
3. La mesure d'une aire est un nombre réel, positif qui n'est défini qu'après le choix d'une aire de référence, appelée unité d'aire. Dans le SYSTEME INTERNATIONAL, l'unité d'aire est le mètre carré (m²) : le mètre carré est l'aire d'un carré dont la longueur des côtés mesure un mètre.

Toutefois, en pratique, lorsque le maître initiera ses élèves à des constructions géométriques de base, il fera utiliser le centimètre carré comme unité d'aire.

(1 cm² = $\frac{1}{10\,000}$ m² ou 1 m² = 10 000 cm²)

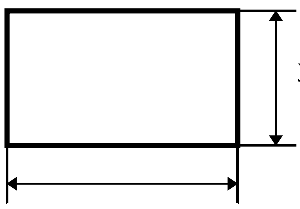
Remarque :

Contrairement à beaucoup de grandeurs qui se mesurent directement à l'aide d'un appareil de mesure (longueur, temps, masse, intensité, …), l'aire d'une surface ne peut se mesurer directement à l'aide d'un appareil ou d'un instrument : la mesure d'une aire se fera toujours indirectement, à partir de mesures d'au moins deux longueurs.

B. ETUDE THEORIQUE D'UN CAS PARTICULIER USUEL.

Les notions d'aire et de périmètre d'une surface se côtoient souvent. Aussi nous nous proposons d'étudier le problème suivant :

Étant donné un rectangle dont l'aire " S " est constante et le périmètre " P " est variable, trouver la variation de ce périmètre en fonction de sa longueur " x ".



Ainsi : x×y= S (où S est constante) mais 2×x + 2×y = P (où P est variable), et il s'agit d'étudier de la fonction P = F(x) avec x > 0 et y > 0, donc S > 0 et P > 0.

En éliminant y, à partir des deux équations précédentes, on obtient la fonction
P = $\frac{2\times S}{x}$ + 2×x, (avec x ≠ 0)

Pour étudier la variation de P = F(x), il faut connaître le signe de la dérivée de P par rapport à x :

P'(x) = $\left(-\frac{S}{x^2}+1\right)$

P'(x) = 0, pour $\left(-\frac{S}{x^2}+1\right)$ = 0, soit x² = S, soit x = $\sqrt{S}$

P’(x) > 0, pour $\left(-\frac{S}{x^2}+1\right)$ > 0, soit x² > S, soit x > $\sqrt{S}$

P’(x) < 0, pour $\left(-\frac{S}{x^2}+1\right)$ < 0, soit x² < S, soit x < $\sqrt{S}$

D’où le tableau de variation et la courbe représentative associée.

x	0		$\sqrt{S}$		$+\infty$
P’(x)	‖	-	0	+	
P(x)	‖$+\infty$	↘	$4*\sqrt{S}$	↗	$+\infty$

On remarque que la courbe représentative de la fonction P(x) admet pour asymptotes les droites d’équation x = 0 et y = 2*x.

Conclusion :

Le périmètre P présente un minimum de 4* $\sqrt{S}$ lorsque x = $\sqrt{S}$ = y.
Ainsi, le périmètre est minimal quand la surface est un carré.
Ce travail pourrait donc se concrétiser par un <u>théorème de géométrie</u> :

Si un rectangle présente une aire constante, son périmètre est minimal quand ce rectangle est un carré.

C. SURFACES DE MEME AIRE MAIS DE FORMES GEOMETRIQUES DIFFERENTES

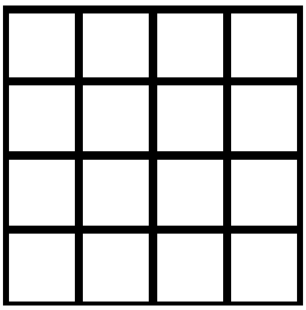
Objectif pédagogique :

On se propose à l’aide de 3 exemples simples différents, de montrer qu’à partir d’une surface pavée, remarquable, on peut construire d’autres surfaces, pavées de la même façon, de même aire, mais de formes géométriques très différentes.

<u>Premier exemple (niveau CM2).</u>

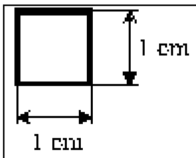
Cet exemple rejoint l’étude théorique réalisée dans la partie B.

La figure de départ est un <u>carré</u>, pavé par 16 carrés de 1 centimètre de côté ; chaque petit carré a donc une aire de 1 cm², tandis que le grand a 4 cm de côté et une aire de 16 cm^2.

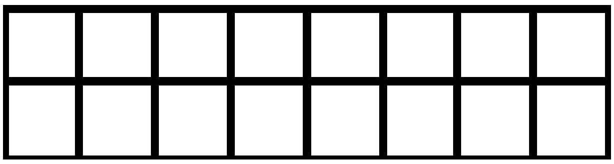


P = 16 cm

S = 16 cm²

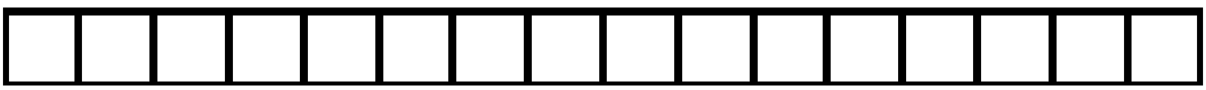


Carré unité



A gauche, S = 16 cm² et P = 20 cm

Au dessous, S = 16 cm² et P = 34 cm

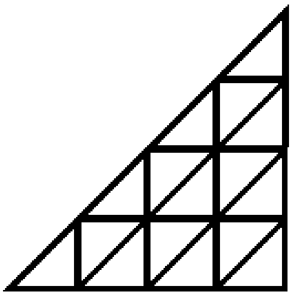


Ces trois rectangles ont la même aire “ S ”, mais leurs périmètres “ P ” sont différents.

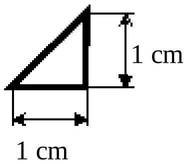
P est minimum quand le rectangle devient un carré. Ce résultat est conforme à la théorie B.

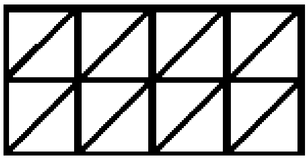
Deuxième exemple (niveau CM2)

La figure de départ est un triangle rectangle isocèle, pavé par 16 triangles isocèles rectangles dont les côtes de l'angle droit mesurent 1 cm. Chacun d'eux a donc une aire de ½ cm².



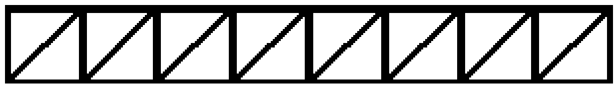
L'aire du triangle rectangle isocèle dont les côtes de l'angle droit mesurent 4 cm est S=½*4*4 cm², donc S=½×16 donc S=8 cm²

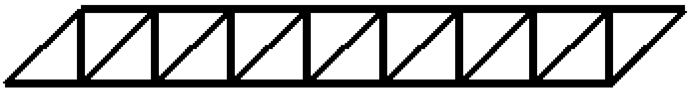




Avec les 16 triangles isocèles rectangles, on peut obtenir un rectangle dont l'aire est S = 8 cm². Sa longueur mesure 4 cm ; sa largeur mesure 2 cm.

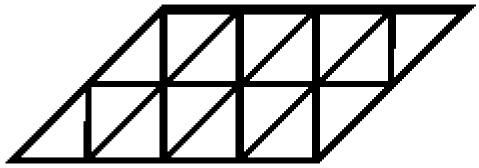
Ici, nous avons un rectangle dont l'aire est 8 cm². Sa longueur mesure 8 cm ; sa largeur mesure 1 cm.

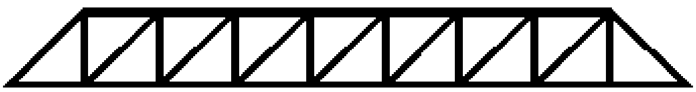




Avec les 16 pavés précédents, on peut construire un parallélogramme dont l'aire S mesure 8 cm². Sa base mesure 8 cm ; sa hauteur mesure 1 cm.

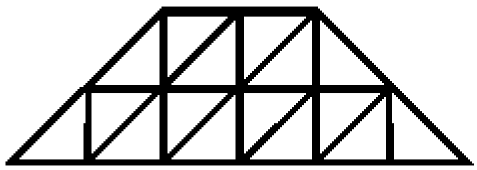
On peut aussi construire un parallélogramme de même aire. Mais sa base mesure 4 cm, et sa hauteur : 2 cm.



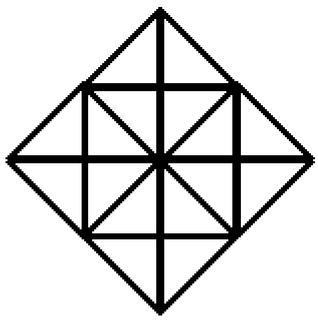


Avec les 16 pavés précédents, on peut construire un trapèze isocèle dont l'aire mesure toujours 8 cm². Sa grande base mesure 9 cm, sa petite base 7 cm et sa hauteur 1 cm.

On peut construire également un trapèze isocèle dont l'aire mesure toujours 8 cm². Sa grande base mesure 6 cm ; sa petite base et sa hauteur mesurent 2 cm.



Enfin, avec les 16 pavés de base, on peut construire un carré dont les diagonales mesurent 4 cm, l'aire de ce carré mesurant toujours 8 cm². On remarquera que ce deuxième exemple permet de retrouver avec les élèves et d'une façon empirique, les formules donnant l'aire des surfaces géométriques de base (rectangle, parallélogramme trapèze…)

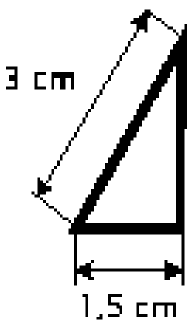


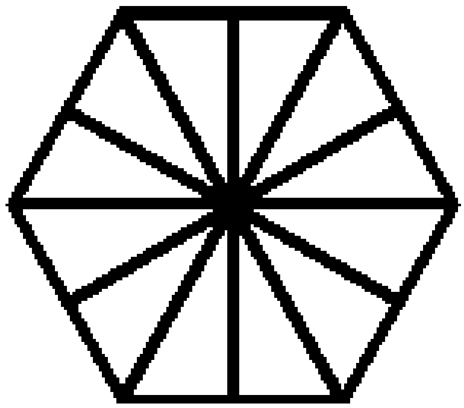
Troisième exemple (niveau CM2)

Les transformations qui suivent sont réalisables en CM2 à condition de se limiter aux seules constructions géométriques)

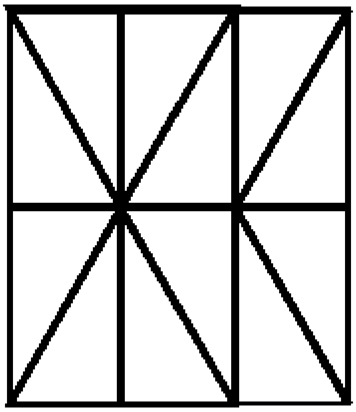
La surface géométrique de départ est ici un hexagone dont les côtés mesurent 3 cm.

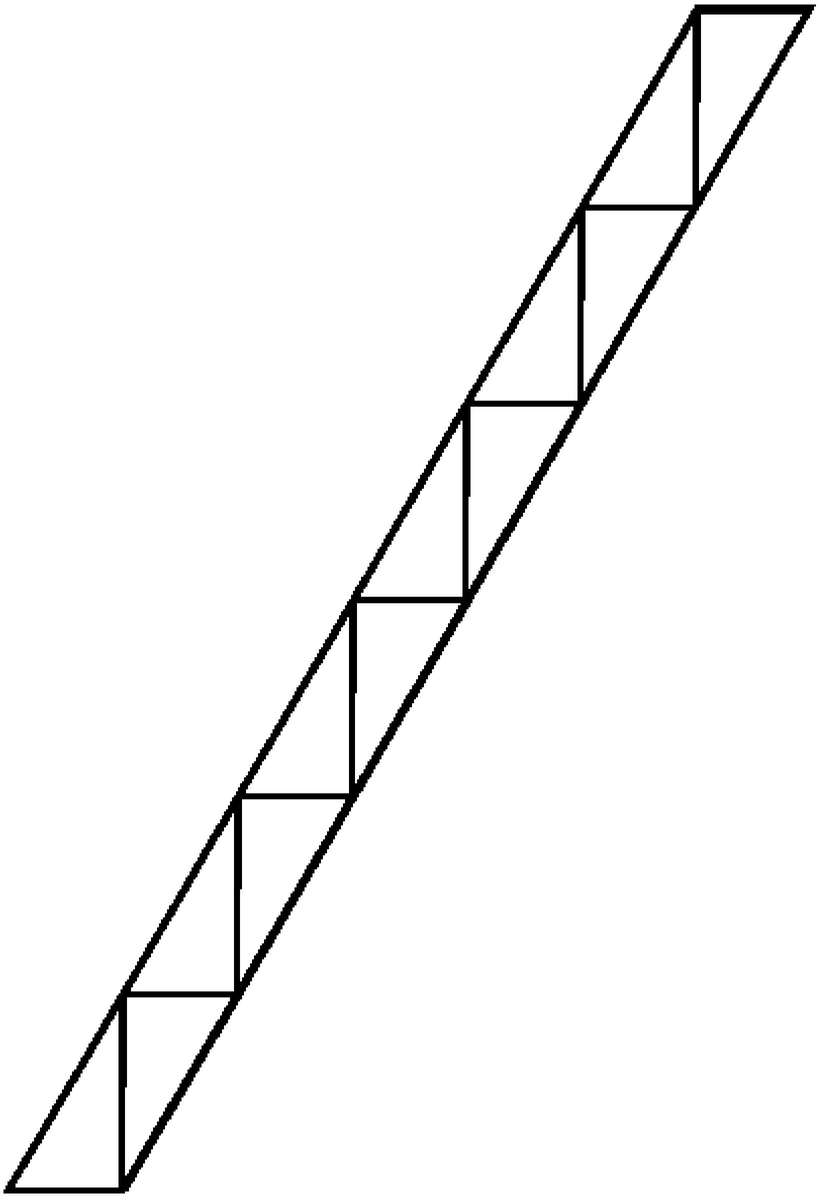
Celui-ci est pavé de 12 triangles rectangles. Pour chacun d'eux, l'hypoténuse mesure 3 cm et le petit côté de l'angle droit : 1. 5 cm. (Ce sont en fait, des demi-triangles équilatéraux !)

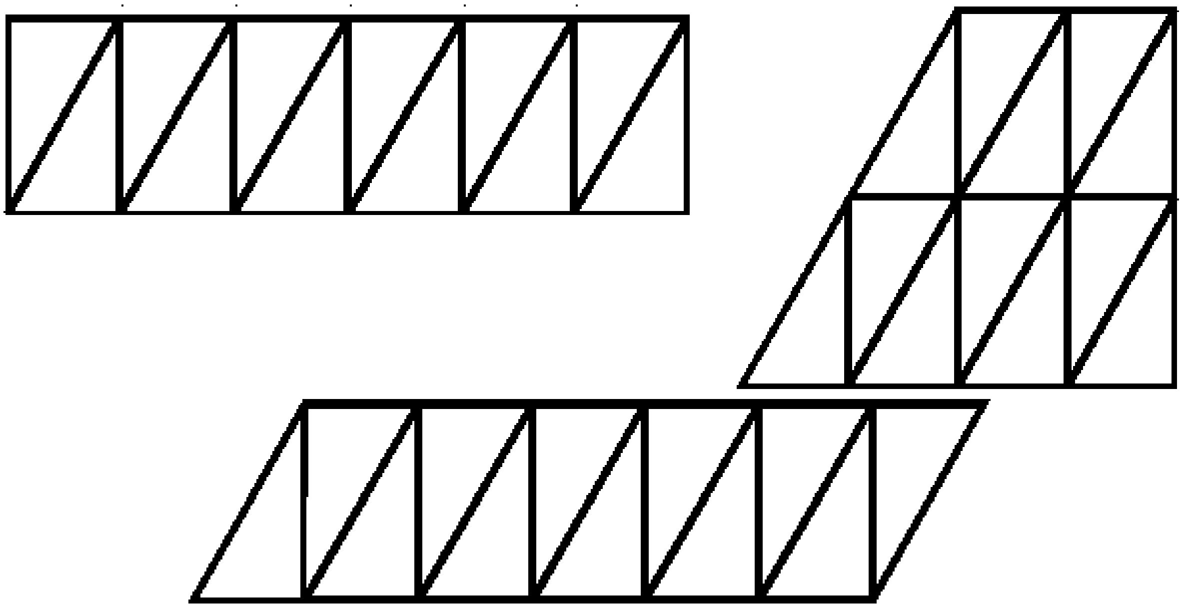




En utilisant les 12 pavés de base, on peut obtenir 2 rectangles, 2 parallélogrammes et un trapèze rectangle.







Ces 5 surfaces, de formes très différentes ont toutes la même aire que l’hexagone précédent.

Conclusion

La méthode précédente qui consiste à partir d’une surface géométrique pavée, à construire différentes surfaces, mais pavées de la même façon donc de même aire permet :

- de bien différencier la notion d’aire de celle de périmètre.
- de généraliser à des surfaces géométriques complexes qui sont des associations de surfaces remarquables.

En outre, le pavé de base peut être choisi comme unité d’aire, ce qui nous conduit alors, à la notion de mesure d’aire. Celle-ci a été abordée dans les deux premiers exemples.